
Intégrale de Fresnel

Proposition — $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

DÉMONSTRATION

On va chercher à calculer l'intégrale semi-convergente (d'après la règle d'Abel)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{it} dt < +\infty.$$

On va montrer le lien avec l'intégrale de Fresnel.

Soit $M > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{1}{\sqrt{t}} e^{it} dt &= \int_0^{\sqrt{M}} \frac{1}{u} e^{iu^2} \cdot 2u du \text{ par le clangement de variable } u = t^2 \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{M}} e^{iu^2} du. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{it} dt = \frac{1}{2} I.$$

Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt} dt.$$

φ est bien définie car l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Comme pour tout $x_0 \geq 0$

- pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt}$ est dérivable en x_0

-
- $\forall t > 0, \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt} \right) (x_0) \right| \leq \sqrt{t} e^{-t}$ intégrable sur $[0; +\infty[$

d'après le théorème de régularité sous l'intégrale, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t} e^{-t} e^{ixt} dt.$$

Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \cdot i e^{(ix-1)t} dt \\ &= \left[\sqrt{t} \cdot \frac{i}{ix-1} e^{(ix-1)t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{i}{ix-1} e^{(ix-1)t} dt \\ &\text{par intégration par parties} \\ &= -\frac{1}{2(x+i)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt} dt \\ &= -\frac{1}{2(x+i)} \varphi(x) \end{aligned}$$

On fait une IPP sur $[0; +\infty[$ ce qui n'est pas possible. Normalement, on aurait dû faire l'IPP sur un domaine $[0; M]$, $M > 0$ puis passer à la limite sur $M \rightarrow +\infty$. Mais les détails seraient trop longs. Je vous garantis qu'on trouve le résultat souhaité. Par ailleurs ce ne sera pas la seule fois où on s'autorisera cet abus mais à chaque fois ce ne sera qu'une abréviation de la méthode correcte.

Or $\forall x \geq 0, \int_0^x \frac{1}{t+i} dt = \int_0^x \frac{t-i}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - i \arctan(x)$
 et $\varphi(0) = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$

Donc

$$\forall x \geq 0, \varphi(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (1+x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan(x)\right).$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \varphi(x) &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{xt}} e^{-t} e^{ixt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u/x} e^{iu} du \text{ par le changement de variable } u = xt \end{aligned}$$

Pour tout $y \geq 0$, on pose $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \geq 0$, on pose $F_n(y) = \int_{1/n}^n \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du$.

On va montrer que F est limite uniforme des F_n , fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|F(y) - F_n(y)| &= \left| \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du + \int_n^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du \right| \\
&\leq \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{u}} du + \left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du \right| \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \left| \int_n^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-uy} e^{iu} du \right| \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \left| \left[\frac{1}{i-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} e^{u(i-y)} \right]_n^{+\infty} - \int_n^{+\infty} \frac{-1}{2(i-y)} \cdot \frac{1}{u\sqrt{u}} e^{u(i-y)} du \right| \\
&\quad \text{par IPP} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \int_n^{+\infty} \frac{1}{2u\sqrt{u}} du \\
&\leq \frac{3}{\sqrt{n}} + \left[\frac{-1}{\sqrt{u}} \right]_n^{+\infty} \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|F - F_n\|_\infty \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, F est continue en 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{iu} du = I.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \varphi(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\pi/4}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$

d'après la formule des compléments.

□